Meno a priezvisko:
Škola: Škola pre mimoriadne nadané deti a Gymnázium
Predmet: Fyzika
Školský rok/blok: /
Skupina:
Trieda:
Dátum:

Teória

2 Mechanické kmitanie a vlnenie

2.1 Mechanické kmitanie

2.1.7 Dynamika kmitavého pohybu

Príčinou kmitavého pohybu je **sila pružnosti** alebo **tiažová sila**. Pomocou 2. Newtonovho zákona môžeme pre veľkosť tejto sily písať:

$$F = ma = -m\omega^2 y$$

čo je **pohybová rovnica** harmonického kmitania.

Vzťah $a = -\omega^2 y$, ktorý bol v odvodení použitý, bol odvodený spolu so vzťahom závislosti veľkosti okamžitého zrýchlenia od času.

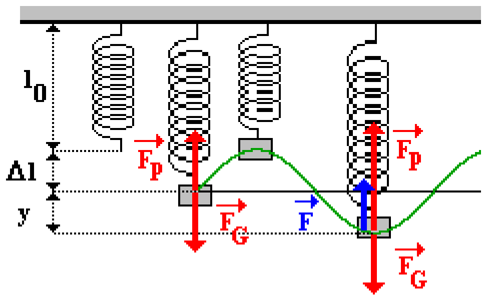
2.1.8 Kmitanie spôsobené silou pružnosti

Vlastnosti mechanického oscilátora, ktorý vytvoríme závažím zaveseným na pružine, sú dané hmotnosťou m tohoto telesa a tuhosťou pružiny k. Ak zavesíme na pružinu dĺžky l_0 závažie s hmotnosťou m, začne pôsobiť na pružinu sila, ktorá je úmerná predĺženiu pružiny Δl. Konštantou úmernosti je **tuhosť pružiny** k definovaná vzťahom $k = \dfrac{F}{\Delta l}$; $[k] = N.m^{-1}$.

V rovnovážnej polohe na pružinu so závažím pôsobí sila pružnosti s veľkosťou $F_p = k.\Delta l$ a sila tiažová $\vec{F}_G$, ktorá má rovnakú veľkosť, ale opačný smer. Preto

$$mg = k\Delta l$$

Sila pružnosti sa snaží vrátiť pružinu do pôvodného nedeformovaného stavu (ešte pred zavesením závažia). Po zavesení závažia na pružinu mieri sila pružnosti vždy smerom hore.



Ak uvedieme oscilátor do kmitavého pohybu, tiažová sila je konštantná (má rovnakú veľkosť a smer). Mení sa ale veľkosť sily pružnosti, pretože sa neustále mení výchylka telesa zaveseného na pružine, čo môžeme vidieť aj na obrázku. Pre výslednú silu $\vec{F}$ platí: $\vec{F} = \vec{F}_p + \vec{F}_G$. Pre veľkosť tejto sily môžeme písať:

$$F = F_G - F_p = mg - k(\Delta l + y) = -ky$$

Opäť si musíme uvedomiť, že okamžitá výchylka oscilátora je meraná od rovnovážnej polohy. Ak sa nachádza oscilátor pod rovnovážnou polohou svojho kmitavého pohybu (posledná zakreslená situácia na obrázku), mieri sila $\vec{F}$ smerom hore.

V prípade, keď sa oscilátor nachádza nad rovnovážnou polohou, mieri sila smerom dole. Inými slovami: sila $\vec{F}$ má vždy opačný smer ako výchylka oscilátora.

Sila $\vec{F}$ pôsobiaca na mechanický oscilátor smeruje stále do rovnovážnej polohy a je príčinou kmitavého pohybu.

Ak porovnáme odvodenú veľkosť sily s pohybovou rovnicou harmonického kmitania, môžeme napísať:

$$-ky = -m\omega^2 y$$

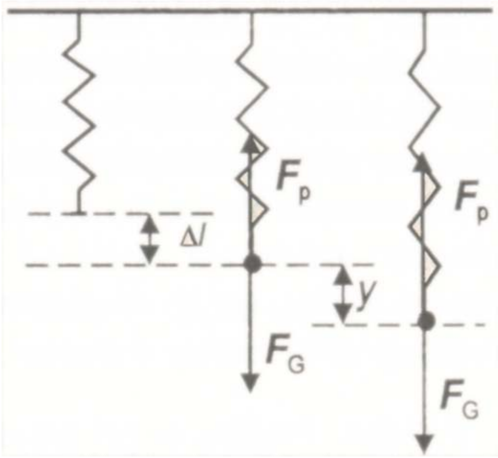
odkiaľ dostávame $\omega^2 = \frac{k}{m}$. Ak kmitá oscilátor s uhlovou frekvenciou $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$, nazývame toto kmitanie **vlastné kmitanie oscilátora**. Odtiaľ už ľahko odvodíme vzťahy pre periódu T_0 a frekvenciu f_0 vlastného kmitania:

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

$$f_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

Pružinový oscilátor je hmotný bod s hmotnosťou m zavesený na pružine s tuhosťou k. V rovnovážnej polohe je tiažová sila v rovnováhe so silou pružnosti pružiny, teda $m.g = k.\Delta l$. Ak okamžitá výchylka je rovná y, tak na hmotný bod pôsobí výsledná sila

$$F = F_G - F_p = m.g - k(\Delta l + y) = -k.y$$



teda pružinový oscilátor je harmonický . Potom $m.a = -k.y$, odkiaľ $a = -\frac{k}{m}y = -\omega^2 y$.

Uhlová frekvencia bude $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ a pre periódu vlastných kmitov platí $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$.

2.1.9 Kmitanie spôsobené tiažovou silou - kyvadlo

Kyvadlo sa objavuje v histórii ľudstva veľmi skoro ako jednoduché zariadenie na meranie času. Jeho periódu je možné **jednoducho a presne** nastaviť zmenou jediného parametru – **dĺžky kyvadla** l. Konštrukciou prvých kyvadlových hodín sa zaoberal holandský fyzik Christian Huygens (1629 - 1695).

Ako kyvadlo sa označuje akékoľvek teleso zavesené nad ťažiskom, ktoré sa môže voľne otáčať okolo vodorovnej osi prechádzajúcej bodom závesu kolmo k rovine kmitania.

Existujú tieto druhy kyvadiel:

1. **matematické kyvadlo** – najjednoduchší typ; jedná sa o hmotný bod na dlhom závese, ktorý sa kýve s malým rozkyvom;
2. **fyzikálne kyvadlo** – kyvadlo, u ktorého je nutné vziať do úvahy jeho moment zotrvačnosti;
3. **kónické kyvadlo** – kyvadlo, ktoré opisuje pri svojom pohybe plášť kužeľa; vrchol kužeľa pritom leží v mieste upevnenia kyvadla;
4. **Blackburnovo kyvadlo** – kyvadlo, pomocou ktorého je možné demonštrovať Lissajousove obrazce vznikajúce pri skladaní dvoch na seba kolmých kmitov;
5. **torzné kyvadlo** – kyvadlo, založené na deformácii krútením pevného vlákna alebo pevnej tyče.

Matematické kyvadlo môže byť loptička zavesená na tenkej šnúrke, skokan bungee-jumpingu kývajúci sa na dlhom lane, ... Fyzikálne kyvadlo predstavuje baseballová palica, s ktorou kýve hráč v ruke, ... Kónické kyvadlo je loptička, ktorú rozkýveme tak, že špagátik, na ktorom visí, opisuje plášť rotačného kužeľa.

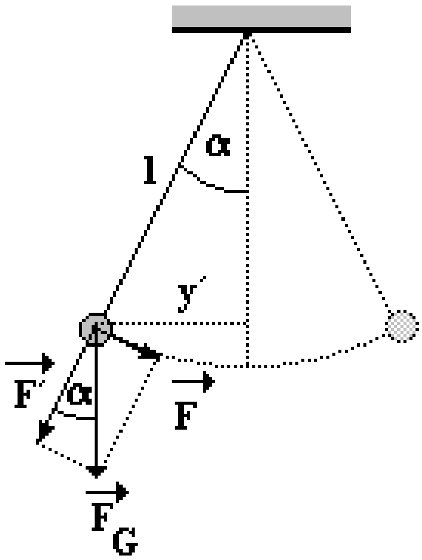
2.1.9.1 Matematické kyvadlo

Najjednoduchším modelom kyvadla je matemetické kyvadlo, u ktorého rešpektujeme isté aproximácie a obmedzenia:

1. **Obmedzíme sa na malé výchylky**, aby sme mohli oblúk, po ktorom sa teleso pohybuje, považovať za úsečku. Toto je dostatočne presne splnené pre výchylku zhruba **do** 5°.
   Toto zjednodušenie vychádza z vlastnosti goniometrických funkcií. Pre malé uhly platí: $\sin\alpha \doteq \alpha$.
   Je jednoduché si overiť, že to pre $\sin\alpha \doteq \alpha$ skutočne platí. Na kalkulačke premeňte uhol 5° do oblúkovej miery (vyjadrite ho v radiánoch) a nájdite jeho sínus. Obe čísla (uhol aj jeho sínus) budú skoro rovnaké.

2. **Zanedbávame trenie v bode závesu i odporovú silu vzduchu**.

Príčinou kmitavého pohybu je pohybová zložka $\vec{F}$ tiažovej sily $\vec{F}_G$. Sila $\vec{F}_G$ vzniká pri vychýlení kyvadla z rovnovážnej polohy.



Podľa obrázku platí:

$$\sin\alpha = \frac{F}{F_G} = \frac{y'}{l} \doteq \frac{y}{l}$$

kde y je dĺžka oblúku opísaného hmotným bodom tvoriacim matematické kyvadlo. odtiaľ dostávame:

$$F \doteq -F_G \frac{y}{l} = -mg\frac{y}{l}$$

Znamienko mínus vyjadruje fakt, že sila (rovnako ako u telesa zaveseného na pružine) je orientovaná opačne ako výchylka. Sila $\vec{F}$ totiž pôsobí vždy smerom do rovnovážnej polohy, zatiaľ čo výchylka sa meria od rovnovážnej polohy.

Ak zrovnáme tento vzťah s pohybovou rovnicou harmonického kmitania, dostávame

$$-mg\frac{y}{l} = -m\omega^2 y$$

Odtiaľto získame pre uhlovú frekvenciu vzťah $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$. Vlastné kmitanie matematického kyvadla je opísané uhlovou frekvenciou $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$. Z tohoto vzťahu už veľmi jednoducho odvodíme vzťahy pre periódu a frekvenciu vlastného kmitania matematického kyvadla:

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

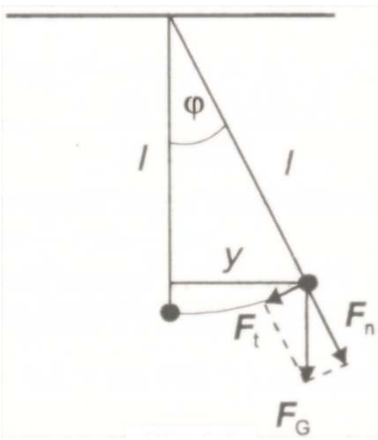
$$f_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{l}}$$

Rovina kyvu kyvadla sa počas jeho pohybu zachováva, čo je možné overiť napríklad Foucaltovým kyvadlom. To je vytvorené dostatočne dlhým závesom s ťažkým závažím, ktorý sa nechá kývať dlhšiu dobu. Na počiatku kývania sa určí rovina, v ktorej sa má kyvadlo kývať (vzhľadom na okolie) a po určitej dobe sa zistí, že rovina kybu sa od pôvodného smeru odchýlila, pretože kyvadlo sa kýve stále v rovnajek rovine a Zem sa „pod ním podtáča".

Dlý záves a veľká hmotnosť závažia sú nutné pre výhodný pomer veľkosti tiažovej sily a odporovej sily vzduchu. V praxi totiž odporová sila na telesá pôsobí a preto je nutné jej veľkosť voči veľkosti inej sily (v tomto prípade tiažovej) potlačiť.

****

Matematické kyvadlo je hmotný bod zavesený na závese s dĺžkou l, pohybujúci sa účinkom tiažovej sily. Záves má zanedbateľnú hmotnosť. Ak uhol φ je malý, môžeme kmitavý pohyb považovať za lineárny.



Pre silu F_t spôsobujúcu pohyb platí

$$F_t = -mg\sin\varphi = -mg\frac{y}{l} = -m\frac{g}{l}y = -ky$$

teda matematické kyvadlo je harmonický oscilátor.

Potom

$m.a = -k.y = -m\frac{g}{l}y = -m\omega^2 y$

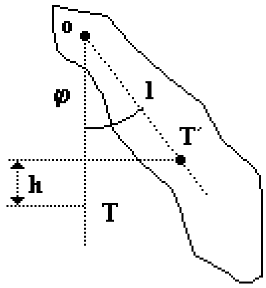
a uhlová frekvencia bude $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$.

Pre periódu vlastných kmitov platí $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$.

****

2.1.9.2 Fyzikálne kyvadlo

Matematické kyvadlo sa veľmi zle realizuje – v praxi je nezostrojiteľné. Skutočné kyvadlá sú vždy pevné telesá, ktoré sú zavesené tak, aby sa mohli kývať okolo osi prechádzajúcej nad ťažiskom. Také kyvadlo sa nazýva **fyzikálne kyvadlo**. Odvodenie pre naše potreby nie je celkom priamočiare a presné, ale napriek tomu sa k nemu môžeme priblížiť. Budeme vychádzať zo Zákona zachovania energie.



Kyvadlo opíšeme pomocou vzdialenosti l ťažiska od osi otáčania, hmotnosti kyvadla m a momentu zotrvačnosti J vzhľadom k osi symetrie (t.j. osi prechádzajúcej ťažiskom kyvadla). Pri vychýlení o malý uhol φ do výšky h získa kyvadlo potenciálnu energiu (vzhľadom k svojej rovnovážnej polohe) E_p. Výšku h môžeme vyjadriť pomocou goniometrickej funkcie $\cos\varphi = \frac{l-h}{l}$, odkiaľ dostávame $h = l.(1-\cos\varphi)$. Potenciálna energia, ktorú má kyvadlo v tejto výške môžeme napísať v tvare $E_p = m.g.h = m.g.l.(1-\cos\varphi)$. Vzhľadom k tomu, že nás zaujímajú malé rozkyvy kyvadla, je možné použiť približný vzťah $1-\cos\varphi \doteq \frac{\varphi^2}{2}$, ktorý pre malé uhly platí. Potenciálnu energiu môžeme zapísať v tvare $E_p \doteq m.g.l.\frac{\varphi^2}{2}$.

Poznámka: Funkcia $y = 1-\cos x$ sa teda v okolí počiatku sústavy súradníc (pre malý rozkyv kyvadla) správa podobne ako funkcia $y = \frac{x^2}{2}$.

Potenciálna energia sa bude po uvolnení kyvadla meniť na kinetickú energiu rotačného pohybu $E_k = \frac{1}{2}J_1\omega^2$, kde $J_1 = J + m.l^2$ je moment zotrvačnosti vzhľadom na os, okolo ktorej sa kyvadlo kýve, vypočítaný na základe Steinerovej vety a ω je uhlová rýchlosť rotačného pohybu. Zo zákona zachovanie mechanickej energie dostávame $E_p = E_k$ a po dosadení

$mgl\varphi^2 = (J + ml^2)\omega^2$. Odtiaľ dostávame uhlovú frekvenciu kmitania fyzikálneho kyvadla v tvare $\omega = \sqrt{\frac{mgl}{J+ml^2}}$. Tento vzťah je možné upraviť na $\omega = \sqrt{\frac{g}{\frac{J+ml^2}{ml}}}$, kde $\frac{J+ml^2}{ml} = l_{red} = L$ je tzv. redukovaná dĺžka fyzikálneho kyvadla.

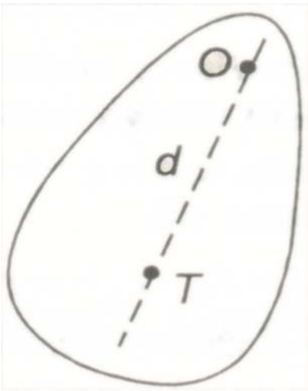
Fyzikálne kyvadlo sa teda kýve s rovnakou periódou ako kyvadlo matematické, ak je redukovaná dĺžka fyzikálneho kyvadla rovnaká ako dĺžka matematického kyvadla.

****

Fyzikálne kyvadlo je dokonale tuhé teleso s hmotnosťou m otáčavé okolo vodorovnej osi neprechádzjúcej ťažiskom a pohybujúce sa účinkom tiažovej sily. Dá sa dokázať, že fyzikálne kyvadlo koná harmonický kmitavý pohyb s periódou

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mgd}}$$

kde J je moment zotrvačnosti telesa vzhľadom na os otáčania, d je vzdialenosť ťažiska T od osi otáčania. Veličina $L = \frac{J}{m.d}$ je **redukovaná dĺžka fyzikálneho kyvadla**. Je to dĺžka takého matematického kyvadla, ktoré má rovnakú periódu vlastných kmitov ako uvažované fyzikálne kyvadlo.



Fyzikálne kyvadlá sú dôležitou súčasťou gravimetrických prístrojov, ktoré umožňujú presné merania tiažového zrýchlenia. Lokálna hodnota tiažového zrýchlenia závisí od zemepisnej šírky, nadmorskej výšky, ale aj od zloženia zemskej kôry, preto umožňuje robiť závery o zložení zemskej kôry.